Ad-Soyad :

Numara :

1	2	3	4	5	6	Toplam

06.01.2020

2019-2020 Güz Dönemi ANALİZ III (A-B) Final Sınavı Soruları

1. $\mathbb{R}^3$ de verilen $x=(3,6,6)$ ve $y=(1,0,1)$ vektörlerinin iç çarpımını ve bu vektörler arasındaki açıyı bulunuz.

2. **a.** $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x>0 \ \ ve \ \ y\neq 0\right\}$ kümesinin dışını, sınırını bulunuz ve çiziniz.

b. $\mathbb{R}^n$ de sonlu sayıda açık kümelerin arakesiti yine açık kümedir, ispatlayınız.

3. Aşağıdaki serilerin yakınsaklık yarıçaplarını ve yakınsaklık aralıklarını bulunuz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{5^n n}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x+2)^{n-1}}{n+1}$

4. $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\cdot\ln x}$ integralinin karakterini belirleyiniz.

5. Her $n\in\mathbb{N}$ için $f_n(x)=(n+1)x^n$ olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisinin $[-1/2,1/2]$ kapalı aralığı üzerindeki düzgün yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

6. Toplamı $\ln(1-x^2)$ olan kuvvet serisini bulunuz.

Not: Süre 110 dakikadır. Sorular eşit puanlıdır.

BAŞARILAR….

Prof. Dr. Cenap DUYAR - Doç. Dr. Ayşe SANDIKÇI

1. $\langle x,y\rangle = \langle (3,6,6),(1,0,1)\rangle = 3+6=9$ bulunur. Yine

$\|x\| = \sqrt{3^2+6^2+6^2} = \sqrt{81} = 9$ ve $\|y\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$ olup,

$$\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ifadesinden $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ elde edilir.

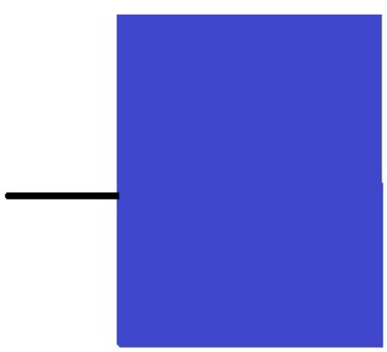
2. $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0 \ \ ve \ \ y\neq 0\} = (0,\infty)\times\{(-\infty,0)\cup(0,\infty)\}$ şeklinde yazılabilir. A kümesi açık olduğundan $A = \overset{\circ}{A}$ olur.

$$\overline{A} = \overline{(0,\infty)\times\{(-\infty,0)\cup(0,\infty)\}} = \overline{(0,\infty)}\times\overline{\{(-\infty,0)\cup(0,\infty)\}} = [0,\infty)\times\mathbb{R}$$

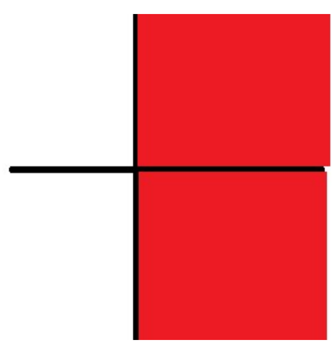
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0\}$$

$$d\imath\c{s}\, A = \mathbb{R}^2 - \overline{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<0\}$$

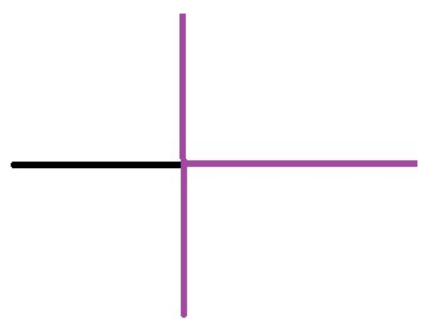
$$\partial A = \overline{A} - \overset{\circ}{A} = \{\{0\}\times\mathbb{R}\}\cup\{(0,\infty)\times\{0\}\}$$



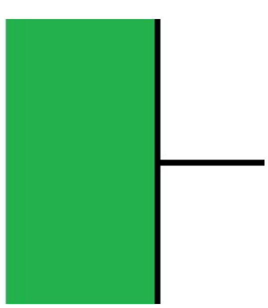
$\overline{A}$



$A = \overset{\circ}{A}$



∂A



$d\imath\c{s}\, A$

b. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının sonlu sayıda açık alt kümeleri $E_1, E_2, ..., E_n$ ve $A = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$ olsun. Her $x \in A$ için $i = 1, 2, 3, ..., n$ olmak üzere $x \in E_i$ olup $B(x, r_1) \subset E_1$, $B(x, r_2) \subset E_2$, …, $B(x, r_n) \subset E_n$ olacak şekilde $r_1, r_2, ..., r_n > 0$ sayıları vardır. Eğer $r = \min\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ denirse $B(x, r) \subset A$ olur. O halde A kümesi açıktır.

3. a) Bu seride $a_n = \frac{1}{5^n n}$ olup, R serinin yakınsaklık yarıçapı olmak üzere

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)5^{n+1}}{5^n n} = 5\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n} = 5$$

bulunur. O halde verilen seri $|x-3| < 5 \Leftrightarrow -2 < x < 8$ aralığında yakınsaktır. Şimdi serinin aralığın uç noktalarında yakınsayıp yakınsamadığına bakalım.

$x = -2$ olsun. Böylece verilen seri $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{5^n n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ serisine dönüşür. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ ve $b_n = \frac{1}{n}$ olmak üzere (b_n) dizisi azalan olduğundan Leibnitz testi gereği bu seri yakınsaktır.

Şimdi $x = 8$ olsun. Böylece verilen seri $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5)^n}{5^n n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ serisine dönüşür. Bu seri harmonik seri olduğundan ıraksaktır. O halde verilen kuvvet serisi $-2 \le x < 8$ aralığında (yani $[-2, 8)$ aralığında) yakınsaktır.

b) Öncelikle $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x+2)^{n-1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k (x+2)^k}{k+2}$ yazılır. Bu seride $a_k = \frac{(-1)^k}{k+2}$ olup R serinin yakınsaklık yarıçapı olmak üzere

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^k (k+3)}{(k+2)(-1)^{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+3)}{(k+2)} = 1$$

bulunur. O halde verilen seri $|x+2| < 1 \Leftrightarrow -3 < x < -1$ aralığında yakınsaktır. Şimdi serinin aralığın uç noktalarında yakınsayıp yakınsamadığına bakalım.

$x = -1$ olsun. Böylece verilen seri $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+2}$ serisine dönüşür. $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+2} = 0$ ve $b_k = \frac{1}{k+2}$ olmak üzere (b_k) dizisi azalan olduğundan Leibnitz testi gereği bu seri yakınsaktır.

Şimdi $x=-3$ olsun. Böylece verilen seri $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(-1)^k}{k+2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+2}$ serisine dönüşür. Her k için $\frac{1}{k+2}\geq\frac{1}{3k}$ olup $\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ serisi ıraksak olduğundan karşılaştırma testi gereği $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+2}$ serisi de ıraksak olur. O halde verilen kuvvet serisi $-3<x\leq-1$ aralığında (yani $(-3,-1]$ aralığında) yakınsaktır.

4- $[1,e]$ integralleme aralığı sınırlı ve $\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x.\ln x}=\infty$ olduğundan verilen bir 2.tür has olmayan integrakdir.

$f(x)=\frac{1}{x.\ln x}$, $g(x)=\frac{1}{\ln x}$ olsun.

$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=1$ olduğundan limit karşılaştırma testine göre $\int_1^e\frac{dx}{x.\ln x}$ ile $\int_1^e\frac{dx}{\ln x}$ integralleri aynı karaktere sahiptir. Öte yandan

$$\lim_{x\to1^+}(x-1)\frac{1}{\ln x}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{(1/x)}=1\neq0$$

olduğundan $\int_1^e\frac{dx}{\ln x}$ integrali ıraksaktır. Buna göre $\int_1^e\frac{dx}{x.\ln x}$ integrali de ıraksak olur.

5- Her $x\in[-1/2,1/2]$ için

$$|f_n(x)|=|(n+1)x^n|\leq\frac{n+1}{2^n}$$

ve $M_n=\frac{n+1}{2^n}$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty}M_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^n}=0$ olduğundan (f_n) fonksiyon dizisi $[-1/2,1/2]$ kapalı aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır.

6- $\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ geometrik serisi $(-1,1)$ açık aralığında yakınsaktır ve burada x yerine x^2 yazılırsa $\frac{1}{1-x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k}$ olur ve bu eşitlikte her iki yan $-2x$ ile çarpılırsa,

$$\frac{-2x}{1-x^2}=-2\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k+1}\Rightarrow\int\frac{-2x}{1-x^2}dx=-2\sum_{k=0}^{\infty}\int x^{2k+1}dx$$
$$\Rightarrow\ln\left(1-x^2\right)=-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+2}}{2k+2}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2(k+1)}}{k+1}$$

elde edilir.